et par suite est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=2x.\sin\frac{1}{x}+x^2\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad pour\ x\neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad pour\ x\neq 0 \\ f'(0)=0 \end{array}}$$

Exercice n° 10

● $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

T.V:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1 ↘	-1	↗ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

● f admet un minimum globale -1 pour la valeur 0.

● $f(]-\infty,0])=[-1,1[$

$f([0,+\infty[)=[-1,1[$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\boxed{-1\le f(x)\le 1}$ donc f est bornée

Exercice n° 11

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

a) $x\mapsto 1-\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$1+\sqrt{x}\neq 0;\forall x>0$ D'où f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},\forall x>0$$

b) $f'(x)<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\overset{t=\sqrt{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{1-t}{1+t}=-1$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	1 ↘	-1

Exercice n° 12

$f:]1,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

● L'équation $f(x)=x$ est equivalente à $f(x)-x=0$

Posons $g(x)=f(x)-x$.

On a: $g(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x$ est continue sur $]1,+\infty[$

Et on a : $g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0$

g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur

$\left]\lim_{x\to+\infty} g,\lim_{x\to 1^+} g\right[=\ ]-\infty,1[=J$

Comme $0\in J$ l'équation $g(x)=0$ Par suite $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]1,+\infty[$.

● $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\sqrt{x}\neq 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$

et pour tout réel $x\in]1,+\infty[$.

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Or $x>1\Rightarrow x\sqrt{x}\ge 1$

$$\Rightarrow\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2x\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{1}{2},\forall x>1.$$

● f est continue sur $]1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$

et $\forall t\ge 1:|f'(t)|\le\dfrac{1}{2}$

$x>1;\alpha>1$ D'après l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$

Comme $f(\alpha)=\alpha$ on aura : $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.

Qarray.tn Aqra Bledi- Qarray.tn